149 - Déterminant. Exemples et applications.

Dans toute la leçon, K est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et on note $A = (a_{ij}) = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$

I Définitions et premières propriétés

I.A Forme linéaire alternée [Ber18]

Définition 1. Une forme n-linéaire est sur E est une application $f : E \times E \times \cdots \times E \to \mathbb{K}$ qui est linéaire en chacune des variables

Exemple 2.

$$C^0([0,1], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \int_0^1 f$$

Définition 3. Une forme n-linéaire f sur E est de plus dite alternée si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$.
On note $\Lambda_n(E)$ le $\mathbb{K}$-ev des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème 4.

$$\dim(\Lambda_n(E)) = 1$$

Plus précisément, pour toute base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E, notée $\det_e$ telle que

$$\det_e(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

et elle engendre $\Lambda_n(E)$.
Si $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, alors :

$$\det_e(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

Remarque 5. En définissant le déterminant par cette formule, on peut prolonger la définition du déterminant d'une famille de vecteurs à coefficients dans un corps à une famille de vecteurs à coefficients dans une anneau commutatif

Remarque 6. La formule nous donne aussi que le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car est polynomial en les coefficients.

Exemple 7.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \epsilon((1\ 4\ 2)(3\ 5)) = -1$$

Définition 8. Soit e une base de E. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E. Alors $\det_e(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle déterminant dans la base e de $(x_1, \ldots, x_n)$.

Corollaire 9. Si e et f sont deux bases de E, alors

$$\det_f = \det_f(e_1, \ldots, e_n) \cdot \det_e$$

Corollaire 10. Soit e une base de E. On a :

$$\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une famille libre} \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base}$$

Remarque 11. Le fait d'être une base ne dépend pas de la base dans laquelle on regarde le déterminant.

I.B Déterminant d'un endomorphisme / d'une matrice [Ber18]

Définition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle déterminant de l'endomorphisme u la quantité $\det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$, noté $\det(u)$ et qui ne dépend pas de la base e de E choisie.

Exemple 13. Le déterminant d'une homothétie de rapport λ est λ^n.

Théorème 14. Le déterminant est un morphisme du groupe $(GL(E), \circ)$ dans le groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$

Corollaire 15. Si A et A' sont deux matrices semblables, alors $\det A = \det A'$

Application 16. On définit $SL(E)$ comme son noyau, c'est donc un groupe.

Définition 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de la matrice A le déterminant de ses colonnes dans la base canonique.

Remarque 18. Il y a une dualité entre matrice et endomorphisme. Cette dualité s'exprime parfaitement en considérant pour une matrice A l'endomorphisme de multiplication à gauche par la matrice A.

I.C Topologie [CG17]

Proposition 19. L'appli déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 20. L'ensemble des matrices $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 21. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 22. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Proposition 23. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Proposition 24. $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Proposition 25. $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Application 26. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

II Algèbre linéaire

II.A Cofacteurs, rang [Gri18]

Proposition 27. On peut calculer le déterminant d'une matrice en effectuant des développement par rapport aux lignes/colonnes de la matrice A :

$$\forall j \in [[1,n]] \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$$

où $\Delta_{i,j}(A)$ est le déterminant obtenu en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne de la matrice A, $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ est la cofacteur d'indice i,j de A.

Exemple 28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathrm{cof}(1) = + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

Définition 29. On appelle mineur d'ordre r de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ le déterminant d'une matrice extraite de A obtenue en choisissant r lignes et r colonnes.

Exemple 30. Par exemple, en choisissant la ligne 2 et 3 et la colonne 2 et 4 de la matrice, on obtient le mineur δ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

Définition 31. Soit $A = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle rang de A, noté rg(A) la taille maximal d'un mineur non nul.

Remarque 32.

$$\mathrm{rg}(A) = r \leqslant n \Leftrightarrow \begin{cases} - & \text{il existe un mineur d'ordre} \\ & \text{r non nul} \\ - & \text{tous les mineurs d'ordre} \\ & \text{s > r sont nuls} \end{cases}$$

Définition 33. On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs de A et elle est noté $\mathrm{Com}(A)$

Théorème 34 (Formule de la comatrice).

$${}^t\mathrm{Com}(A)A = (\det A)I_n$$

En particulier, si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$$

Exemple 35. Si A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, avec $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, on retrouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Application 36 (Différentielle du déterminant). L'appli *déterminant* est de classe C^1 (même C^∞) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$d(\det)(X)(H) = \mathrm{tr}(\,{}^t\mathrm{com}(X)H)$$

II.B Systèmes linéaires (voir 162)[All02]

Définition 37 (système linéaire).

Théorème 38 (Méthode de Cramer). Un système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(avec $A = (a_{ij}) = (c_1, ..., c_n)$ et $\det A \neq 0$)
admet toujours une et une seule solution $\forall b = (b_1, ..., b_n)$ donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n)}{\det A}$$

Définition 39 (opérations élémentaires).

Proposition 40 (Pivot de Gauss).

Remarque 41 (générateur de $SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$).

Exemple 42.

Proposition 43 (complexité).

Remarque 44. Permet de mettre sous forme échelonnée.

Remarque 45. Calcul aisé du déterminant car dilatation λ de det λ, transposition de det -1 et transvection de det 1.

II.C Polynôme caractéristique [MM22]

Définition 46. On appelle polynôme caractéristique de A, le polynôme $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Proposition 47. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$$

Proposition 48. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Proposition 49. Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme u sont les valeurs propres de u.

Exemple 50. Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon associée au polynôme unitaire $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est P

II.D Matrices par blocs [Gri18]

Proposition 51.

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \det A \det C$$

avec $A \in \mathcal{M}_k(K)$ et $A \in \mathcal{M}_{n-k}(K)$.

Application 52. Soient M la matrice d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et F un sous-espace stable de u. Alors $\chi_{u_{|F}} = \chi_u$.

II.E Norme d'un élément dans une extension de corps [Goz09] le développement se trouve aussi dans [Sam71]

Ici L/K est une extension finie de corps et $\alpha \in L$.

Proposition 53. On note μ_α l'application $L \to L; x \mapsto \alpha x$ de multiplication par α dans L. Cette application est K-linéaire ($\mu_\alpha \in \mathcal{L}_K(L)$), c'est de plus un homomorphisme injectif de K-algèbres de L dans $\mathcal{L}_K(L)$.

Corollaire 54. α et μ_α ont même polynôme minimal.

Définition 55. On appelle norme de α relativement à K et on note $N_{L/K}(\alpha)$ le déterminant de μ_α.

Remarque 56. Il s'agit d'un élément de K.

Exemple 57. Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ est une extension de degré 2 et dont une base est $(1, \sqrt{d})$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Alors $\exists!(a, b) \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha = a + b\sqrt{d}$. La matrice de μ_α dans cette base est : $\begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$. On en déduit $N_{L/K}(\alpha) = a^2 - db^2$

Lemme 58. Développement

En désignant par $\pi_{K,\alpha} = X^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i X^i$ le polynôme minimal de α sur K, dans la K-base $b = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{m-1})$ de $K(\alpha)/K$, la matrice de μ_α est la matrice compagnon C_α associée au polynôme $\pi_{K,\alpha}$. En calculant le polynôme caractéristique de la matrice compagnon, on obtient $\pi_{K,\alpha} = \chi_{\mu_\alpha}$ (polynôme caractéristique dans toute extension L/K qui contient α), puis $N_{K(\alpha)/K}(\alpha) = (-1)^m a_0$.

Théorème 59. Développement
Si L/K contient un corps de décomposition $K(x_1, \dots, x_m)/K$ de $\pi_{K,\alpha}$ alors on a une tour d'extension $L/K(x_1, \dots, x_m)/K$, les relations-coefficients racines donnent$N_{K(\alpha)/K}(\alpha) = x_0 \dots x_m$ et la matrice dans une certaine K-base de L de μ_α est diagonale par blocs, avec $[L : K(x_1, \dots, x_m)]$ blocs diagonaux C_α. Il s'en suit $N_{L/K}(\alpha) = (x_0 \dots x_m)^{[L:K(x_1,\dots,x_m)]}$

III Un outil de géométrie

III.A Cramer et la géométrie : coordonnées barycentriques [Aud06]

Définition 60 (barycentre). On appelle barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_iG} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 61 (formule du barycentre). Soient A, B, C tois points non alignés du plan affine. Alors :

$$\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CM})\overrightarrow{AM}+\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})\overrightarrow{BM}+\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}.$$

Remarque 62 (aire d'un triangle). Les coordonnées barycentriques de $M \in \mathcal{P}$ se réinterprètent en terme d'aire de triangle dont M est un sommet. Faire un dessin.

Application 63 (coordonnées centre cercle inscrit). Les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit sont $(A,a),(B,b),(C,c)$.

III.B Volume [Sam71]

Théorème 64. Soit H un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$, alors H est engendré (comme $\mathbb{Z}$-module) par r vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 65. faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$

Définition 66. Un sous-groupe discret de rang n de $\mathbb{R}^n$ est appelé réseau de $\mathbb{R}^n$

Lemme 67. Développement
Soit H un réseau de $\mathbb{R}^n$. Soit e une $\mathbb{Z}$-base de H. Le volume $\mathcal{V}(P_e)$ du parallélogramme $P_e=\{\sum_{i=1}^n a_ie_i \ / \ 0\leqslant a_i<1\}$ est indépendant de la base e choisie pour H. On l'appelle covolume de H, noté Covol(H).

Proposition 68. Développement

$$\mathrm{Covol}(H)=\left(\det\begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle\end{pmatrix}\right)^{1/2}$$

Remarque 69. faire un dessin de pavé

Théorème 70 (Minkowski). Développement
Soit H un réseau de $\mathbb{R}^n$. Soit S une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{V}(S)>\mathrm{Covol}(H)$. Alors il existe x et y éléments de S distincts tels que $x-y\in H$.

Corollaire 71. Soit H un réseau de $\mathbb{R}^n$. Soit S une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ convexe et symétrique par rapport à 0. Si $\mathcal{V}(S)>2^n\mathrm{Covol}(H)$ alors $S\cap H$ contient un point autre que 0.

Application 72. Soit p un nombre premier impair. Alors p est somme de deux carrés si et seulement si $p=1 \pmod 4$)

Théorème 73 (Thèorème de changement de variables). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et φ un C^1-difféormorphisme de U sur $V=\varphi(U)$. Alors V est mesurable et pour toute fonction intégrable $f:V\to\mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v)\mathrm{d}v=\int_U f(\varphi(u))|\det(\mathrm{d}\varphi)(u)|\mathrm{d}u$$

Corollaire 74 (Coordonnées polaires). Dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ les coordonnées polaires et $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ les coordonnées cartésiennes.
Soit U (resp. V) un ouvert de $\mathbb{R}^2$ représenté en coordonées cartésiennes (resp. coordoonées polaires). Alors,

$$\int_U f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_V f(r\cos\theta,r\sin\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\theta$$

Application 75 (Intégrale de Gauss).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

III.C Matrices de Gram [Gri18]

Définition 76. Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien et $\{v_1,...,v_p\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram associée la famille $(v_1,...,v_p)$, la matrice

$$\mathrm{G}(v_1,...,v_p)=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \dots & \langle v_1,v_p\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_p,v_1\rangle & \dots & \langle v_p,v_p\rangle\end{pmatrix}$$

On note $G(v_1,...,v_p)=\det(\mathrm{Gram}(v_1,...,v_p))$.

Exemple 77. Sur $E=L^2(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ muni du produit scalaire $\langle X,Y\rangle=\mathbb{E}[XY]$, la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire $X=(X_1,\dots,X_n)$ est la matrice de Gram de la famille $(X_1-\mathbb{E}[X_1],\dots,X_n-\mathbb{E}[X_n])$

Proposition 78. La famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre si et seulement si $\mathrm{G}(v_1,\dots,v_n)\neq 0$

Théorème 79. Soient $\{v_1,...,v_p\}$ une famille libre de E, $F=\mathrm{Vect}\{v_1,...,v_p\}$ et $x\in E$. Alors,

$$\mathrm{d}(x,F)^2=\frac{G(x,v_1,...,v_p)}{G(v_1,...,v_p)}$$

Application 80 (Inégalité de Hadamard). Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$|\det(x_1,\dots,x_n)|\leqslant\|x_1\|\dots\|x_n\|$$

III.D Résultants [BCG+17] et [Ulm18]

Définition 81 (matrice de Sylvester). Soit A un anneau commutatif. Soit $f,g\in A[T]$ deux polynômes de degrés respectifs n et m. On note : $f=\sum_{i=0}^n a_iT^i$ et $g=\sum_{i=0}^m b_iT^i$. Alors la matrice de Sylvester est la matrice :

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & \dots & a_0 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_n & \dots & a_0 \\ b_m & \dots & \dots & b_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_m & \dots & \dots & b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n}(A).$$

Le déterminant de cette matrice est appelé résultant de f et g, noté $\mathrm{Res}_T(f,g)$

Exemple 82. On considère l'anneau $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$ et les polynômes :

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & Z-(X+Y) \\ f_2 & = & X^2-2 \\ f_3 & = & Y^2-3 \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Res}_X(f_1,f_2) & = & Y^2-2YZ+Z^2-2 \\ \mathrm{Res}_Y(\mathrm{Res}_X(f_1,f_2),f_3) & = & Z^4-10Z^2+1 \end{array}$$

Remarque 83 (intérêt : polynômes multivariés). Cet outil est particulièrement intéressant pour éliminer une variable d'un polynôme multivarié.

Proposition 84. La transposée de $\mathrm{Syl}(f,g)$ est la matrice de l'application linéaire :

$$\varphi_{f,g} : \begin{array}{rcl} A[T]_{<m} \times A[T]_{<n} & \to & A[T]_{<n+m} \\ (U,V) & \mapsto & Uf+Vg \end{array}$$

dans les bases $\big((T^{n-1},0),(T^{n-2},0),\dots,(1,0),(0,T^{n-1}),(0,T^{n-2}),\dots,(0,1)\big)$ au départ et $(T^{n+m-1},T^{n+m-2},\dots,1)$ à l'arrivée.

Théorème 85. Il existe $(U,V) \in A[X]_{<m} \times A[X]_{<n}$ tels que $\mathrm{Res}(f,g) = fU+Vg$

Corollaire 86. $\mathrm{Res}(f,g)=0$ si et seulement si il existe U et V non nuls tels que $fU+Vg$.

Corollaire 87. Si A est un anneau factoriel, alors $f,g \in A[T]$ sont premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{Res}(f,g) \neq 0$.
Autrement dit $\mathrm{Res}(f,g)=0$ si et seulement si f et g ont un facteur commun.

Application 88 (Formule de Héron). On considère la figure (faire un dessin). Alors l'aire Δ du triangle ABC vérifie :

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

Bibliographie

[Aeb11] Bruno Aebischer : *Géométrie.* Vuibert, 2011.

[All02] Grégoire Allaire : *Algèbre linéaire numérique.* ellipses, 2002.

[Amr11] Mohammed El Amrani : *Suites et series numériques, Suites et séries de fonctions.* ellipses, 2011.

[App13] Walter Appel : *Probabilités pour les non probabilistes.* HK, 2e éd édition, 2013.

[Aud06] Michèle Audin : *Géométrie (L3M1).* EDP Sciences, 2006.

[BCG+17] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Marc Giusti, Romain Lebreton, Grégoire Lecerf, Bruno Salvy et Eric Schost : *Algorithmes efficaces en calcul formel.* 2017.

[Ber18] Grégory Berhuy : *Algèbre le grand combat.* Calvage et Mounet, 2e éd édition, 2018.

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* HK, 2e éd édition, 2005.

[CG17] Philippe Caldero et Jérôme Germoni : *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1.* ellipses, 2 édition, 2017.

[Gou20] Xavier Gourdon : *Analyse.* ellipses, 3 édition, 2020.

[Gou21] Xavier Gourdon : *Algèbre.* ellipses, 3 édition, 2021.

[Goz09] Ivan Gozart : *Théorie de Galois.* ellipses, 2e éd édition, 2009.

[Gri18] Joseph Griphone : *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 6 édition, 2018.

[Gue22] Vincent Guedj : *Introduction à la géométrie différentielle.* Dunod, 2022.

[MM22] Roger Mansuy et Rached Mneimné : *Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes.* De Boeck Superieur, 3e éd édition, 2022.

[Per96] Daniel Perrin : *Cours d'Algèbre.* ellipses, 1996.

[PI24] Thimothée Pecatte et Lucas Isenmann : *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* ellipses, 2e éd édition, 2024.

[Rom19] Jean-Etienne Rombaldi : *Analyse matricielle.* EDP sciences, 2e éd édition, 2019.

[Rom21] Jean-Etienne Rombaldi : *Algèbre et géométrie.* De Boeck Superieur, 2e éd édition, 2021.

[Rom24] Matthieu Romagny : Algèbre de dimension finie, théorème de Jordan-Chevalley, exponentielle de matrices. Notes de cours, 2024.

[Rou14] François Rouvière : *petit guide de calcul différentiel.* CASSINI, 4 édition, 2014.

[Sam71] Pierre Samuel : *Théorie algébrique des nombres.* HERMANN, 2 édition, 1971.

[Ulm18] Felix Ulmer : *Anneaux, corps, résultants.* ellipses, 2018.